ACHILLE CRISTALLINI

Ordine disordine caos

Determinismo e causalità nella scienza

SAGGI

Indice

Premessa

Negli ultimi anni del XX secolo i fenomeni caotici, scoperti in quasi ogni ambito delle scienze della natura ma anche nell'economia, nella finanza, nella sociologia e persino nella medicina e nella psicologia, hanno travalicato i confini della discussione scientifica e del dibattito culturale per diventare un argomento di interesse per il pubblico in generale, fornendo lo spunto anche per film e serie televisive di successo. Accanto a migliaia di libri e articoli scientifici e a una mezza dozzina di riviste specializzate, sono stati scritti centinaia di articoli e libri divulgativi e prodotti documentari e trasmissioni televisive.

Come spesso è accaduto in altre situazioni simili (energia nucleare, viaggi spaziali, cambiamento climatico, e così via), la popolarità – e soprattutto la popolarizzazione – non sempre giovano alla correttezza e alla serietà dell'informazione ricevuta dal grande pubblico. Ma riflessi negativi possono esserci anche sul piano della formazione culturale e scientifica delle giovani generazioni e sul loro percorso verso una cittadinanza consapevole e attiva.

Per chi si occupa professionalmente di ricerca scientifica, di storia della scienza, di insegnamento a ogni livello queste situazioni rappresentano quindi occasioni importanti di divulgazione corretta di contenuti spesso complessi e tecnicamente difficili, ma sono anche lo stimolo a sviluppare una riflessione di carattere storico ed epistemologico su quei segmenti di progresso scientifico e tecnologico, sulla loro collocazione nel contesto più generale della crescita culturale e materiale della società umana.

È stato questo lo spirito con il quale ho accettato di tenere una relazione sul tema del "caos deterministico" durante la XIV Scuola di Storia della Fisica, organizzata dall'AIF (Associazione per l'Insegnamento della Fisica) e in particolare dal suo Gruppo di Storia della Fisica, a Messina dal 23 al 27 febbraio 2015, rivolta a un pubblico di insegnanti di scuola superiore e di studenti universitari. Questo libro rappresenta lo sviluppo e l'approfondimento di quella relazione, nel quale ho cercato di utilizzare la grande mole di documenti scientifici che avevo raccolto e organizzato nel corso di circa un anno di lavoro.

I materiali della Scuola di Messina e delle altre che l'hanno preceduta e seguita ogni anno dal 2000 al 2021 sono accessibili on line sulla pagina dedicata al Gruppo di Storia della Fisica all'interno del sito web dell'Associazione (www.aif.it).

Desidero infine ringraziare in modo particolare l'amico e collega Fabiano Minni, già coordinatore di quel Gruppo, per l'incoraggiamento a realizzare il libro e per il suo costante interessamento.

Introduzione

> Le certezze della fisica e di altre scienze della natura vengono oggi messe in forse da una nuova serie di fenomeni caotici, mai osservati prima, sia per questioni di miopia e pigrizia mentale, sia per la mancanza di strumenti adeguati come il computer. Questi fenomeni si rifiutano di obbedire al paradigma della scienza classica, pur rimanendo in una cornice deterministica. Il caos, infatti, rende impossibili le predizioni non per una sua intrinseca natura indeterministica, ma per la sua estrema sensibilità alle condizioni iniziali, che dovrebbero essere date con una precisione impossibile.[1]

Quarantacinque anni or sono, sul numero di dicembre 1975 della «American Mathematical Monthly», apparve un breve articolo, a firma di James A. Yorke (1941) e del suo studente di dottorato Tien-Yien Li (1945), il cui titolo *Period three implies chaos* poteva risultare incomprensibile a chiunque non fosse stato uno degli (allora relativamente pochi) esperti di dinamica dei sistemi. L'argomento dell'articolo e i risultati ottenuti dai due matematici americani sono in realtà descritti esplicitamente fin dalla prima pagina:

> Il modo in cui evolvono nel tempo fenomeni o processi è spesso descritto da equazioni differenziali o da equazioni alle differenze. Una delle situazioni matematiche più semplici si verifica quando il fenomeno può essere descritto da un solo numero [...] e questo numero all'inizio del n+1-esimo anno (o periodo di tempo), x_{n+1} , può essere scritto come

1. Stewart I.N. (2010), *Dio gioca a dadi?*, Bollati Boringhieri, Torino.

> $x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$, dove F è una funzione definita su un intervallo J in sé stesso. Tali modelli sono estremamente semplificati e tuttavia questa equazione apparentemente semplice... può avere un comportamento dinamico estremamente complicato. Il nostro approccio a queste equazioni parte dal punto di vista che irregolarità e oscillazioni caotiche di fenomeni complessi possono talvolta essere comprese in termini di un modello semplice, anche se questo modello non è sufficientemente sofisticato da consentire accurate predizioni numeriche. Lorenz... ha assunto questo punto di vista in un'affascinante serie di lavori dedicati allo studio del comportamento turbolento... In questo articolo analizziamo una situazione nella quale la successione $\{\mathrm{F}(x_n)\}$ è non-periodica e potrebbe essere definita "caotica". Il nostro principale teorema dimostra che il comportamento caotico appare in ogni situazione nella quale una "popolazione" di dimensione *x* può crescere per due o più generazioni e quando ha raggiunto una dimensione insostenibilmente grande va incontro a un crollo che la riporta al livello *x* o anche più in basso [...] May ha scoperto di recente altre proprietà fondamentali di queste mappe nel corso del suo studio indipendente del modo in cui il loro comportamento cambia al variare di uno dei parametri da cui esse dipendono.[2]

Gli storici della scienza concordano sul fatto che in questo articolo per la prima volta sia stato utilizzato consapevolmente il termine "caos" per caratterizzare il comportamento di quei sistemi dinamici deterministici che mostrano insieme "aperiodicità" delle traiettorie evolutive che li descrivono nello spazio delle fasi e una "dipendenza sensibile" di tali traiettorie dalle condizioni iniziali del sistema. Questa sensibilità significa che una piccola variazione nello stato iniziale comporta variazioni molto più grandi negli stati che il sistema raggiungerà durante la sua evoluzione temporale. Nei sistemi fisici reali è molto raro che si conoscano esattamente le condizioni iniziali e di conseguenza, quando essi manifestano comportamenti caotici, questo pone severe limitazioni alla predicibilità della loro evoluzione a lungo termine, anche se si conoscono completamente le leggi fisiche che li governano. Può anche accadere che il comportamento che abbiamo definito caotico abbia le apparenze

2. Li T.Y. and Yorke J.A. (1975), *Period Three Implies Chaos*, in «American Mathematical Monthly», 82, p. 985 (traduzione dell'autore).

di un fenomeno di natura “casuale” e che quindi il sistema fisico che lo manifesta sia ritenuto non deterministico a livello fondamentale.

L’obiettivo di questo libro è abbozzare una ricostruzione storica della nascita e dello sviluppo dello studio dei sistemi dinamici e insieme suggerire alcuni possibili argomenti e percorsi di approfondimento, sia dal punto di vista storico che da quello epistemologico. Il primo capitolo è dedicato a fornire una sommaria definizione dell’argomento di cui vogliamo occuparci, illustrando le sue specificità, le sue basi metodologiche e la natura degli strumenti matematici che sono stati e sono utilizzati nel suo studio.

Il libro è completato da un gruppo di appendici dedicate all’introduzione degli aspetti tecnici fondamentali dei sistemi dinamici, delle proprietà matematiche delle equazioni che li descrivono e dei metodi necessari per la soluzione di tali equazioni. Le appendici sono rivolte in particolare ai lettori che hanno un ricordo precario della matematica studiata nella scuola secondaria o che ritengono utile qualche richiamo di quegli argomenti. Un’appendice in particolare è dedicata alla descrizione di un semplice sistema dinamico, che può essere studiato con strumenti matematici elementari.

Capitolo 1

Sistemi dinamici

Nella fisica-matematica il termine "sistema dinamico" indica un qualunque insieme di equazioni differenziali, ordinarie oppure alle derivate parziali, e un corrispondente insieme di condizioni iniziali e/o al contorno, indipendentemente dal fatto che essi descrivano un sistema fisico reale, che abbiano a che fare con il moto di corpi o l'evoluzione di un sistema o che rappresentino un problema puramente matematico. Storicamente il termine sistema dinamico si è costituito all'interno dello sviluppo, durante il XVIII secolo, della meccanica newtoniana: dapprima in connessione con lo studio della meccanica applicata alle macchine e dell'idrodinamica e poi con la meccanica celeste; infine, nel secolo successivo, con i tentativi di estendere i metodi della meccanica a ogni altro settore della fisica e alle altre scienze, comprese quelle biologiche, economiche e sociali.

Per "stato" di un sistema fisico si intende in generale l'insieme dei valori delle grandezze misurabili che sono necessarie per descriverlo completamente (o almeno in modo ritenuto sufficiente) rispetto a una determinata classe di fenomeni che avvengono al suo interno o ai quali esso partecipa. Nella meccanica classica, ad esempio, un corpo puntiforme è definito dalla sua posizione e dalla sua quantità di moto, ovvero da due grandezze vettoriali tridimensionali. Il suo stato fisico è quindi individuato da sei numeri reali, che forniscono il valore delle componenti ortogonali di quei due vettori rispetto al sistema di riferimento utilizzato per descrivere il corpo e i fenomeni cui esso partecipa.

Lo stato fisico di un sistema può evidentemente cambiare al passare del tempo, in conseguenza della sua dinamica evolutiva interna o a causa di azioni su di esso applicate da altri sistemi. Ogni stato fisico è quindi legato a un particolare istante di tempo e la dinamica (o evoluzione) di un sistema viene descritta dalla successione temporale dei suoi stati fisici. Lo studio di un sistema dinamico ha come obiettivo fondamentale la descrizione matematica di questa successione temporale.

In generale un sistema dinamico è definito dai valori assunti in un certo istante del tempo da n grandezze scalari variabili che si dicono "variabili di stato" o "variabili dinamiche". I valori assunti da tali variabili sono di solito espressi mediante numeri reali quando i sistemi considerati descrivono situazioni o fenomeni naturali o comunque di carattere materiale, mentre possono essere espressi da numeri complessi in problemi di carattere puramente matematico. Nella scienza moderna (intendendo con questo termine l'insieme delle scienze della natura tra la fine del Cinquecento e la fine dell'Ottocento) si assume implicitamente che ogni grandezza misurabile sia in linea di principio una variabile reale continua[1], indipendentemente dal fatto che essa in ogni situazione effettivamente osservabile possa assumere soltanto valori numerabili e finiti o per le sue intrinseche caratteristiche (si pensi alla popolazione di una città oppure al numero di molecole di un gas) o a causa della necessariamente finita sensibilità di qualunque strumento di misura. È proprio questa implicita assunzione di continuità delle grandezze misurabili che ha consentito di utilizzare le equazioni differenziali per descrivere prima i fenomeni fisici e nel seguito tutti i fenomeni naturali e molti di quelli appartenenti alla sfera dell'economia e della sociologia.

Le variabili di stato di un sistema dinamico, opportunamente ordinate, possono essere considerate a loro volta le componenti di un vettore (detto "vettore di stato") definito in uno spazio matematico astratto, che si dice "spazio degli stati" o anche (soprattutto in fisica) "spazio delle fasi". In un sistema dinamico almeno una delle grandezze di stato è variabile nel tempo e tale è quindi anche il vettore di stato. Il problema fondamentale nello studio dei sistemi dinamici è quello di determinare l'andamento nel tempo e quindi l'evoluzione del vettore di stato (cfr. appendice 4).

1. Tralasciando ogni pretesa di correttezza formale, possiamo definire *continua* ogni quantità tale che, comunque siano presi due suoi valori arbitrariamente vicini, tra di essi sia possibile trovarne sempre almeno un altro.

L'implicita assunzione di continuità fatta per le variabili di stato vale anche per il tempo, benché esso abbia – almeno dal punto di vista specificamente fisico se non da quello matematico – uno statuto differente. Infatti, il tempo può scorrere prendendo valori in un insieme "discreto"[2] oppure in un intervallo continuo a seconda delle proprietà intrinseche del sistema considerato oppure in base a scelte di carattere analitico oppure ancora per ragioni sperimentali. Ad esempio, se si studiano statisticamente i risultati ottenuti nel lancio di una moneta o di un dado, il tempo fluisce per istanti discreti (quelli in cui si osserva il risultato) e lo stesso accade nella dinamica di popolazioni (il succedersi delle generazioni). Se invece si studiano gli urti delle bilie su un biliardo, il moto dei corpi avviene in modo continuo nel tempo ma gli urti avvengono in una successione discreta. D'altro canto, la descrizione teorica (matematica) di un moto è sempre continua nel tempo mentre la sua osservazione sperimentale oppure la sua simulazione numerica avvengono soltanto in istanti discreti (i *click* di un cronometro, di un rivelatore, di una macchina fotografica, ecc.).

Un sistema dinamico si dice "lineare" se la funzione matematica che ne descrive l'evoluzione temporale dipende linearmente da tutte le variabili di stato, "non-lineare" in caso contrario. Conseguentemente al modo in cui scorre il tempo al suo interno, un sistema dinamico si dice "a tempo discreto" oppure "a tempo continuo". L'evoluzione di un sistema dinamico può avvenire in modo "deterministico", quando lo stato iniziale determina univocamente quello immediatamente successivo, oppure "stocastico" (o casuale o ancora aleatorio). In quest'ultimo caso la successione degli stati del sistema nel tempo è definita per mezzo di una o più variabili aleatorie dipendenti da un parametro (solitamente il tempo). Un processo stocastico si dice "Markoviano"[3] quando la probabilità di passare da uno stato del sistema a quello successivo dipende unicamente dallo stato di partenza e non dalla "storia" precedente del sistema.

I sistemi dinamici deterministici e a tempo continuo sono normalmente descritti da sistemi di equazioni differenziali (cfr appendice 1), mentre i sistemi dinamici deterministici a tempo discreto e quelli stocastici sono descritti da sistemi di equazioni alle differenze finite oppure da "funzioni iterative"[4] (cfr. appendice 2). L'evoluzione di un sistema

2. Nello stesso spirito della nota 1. un insieme si dice *discreto* quando due suoi qualunque elementi consecutivi sono caratterizzati da una differenza finita.

3. Questo tipo di processo casuale è stato ideato dal matematico e statistico russo Andrej A. Markov (1856-1922).

4. Una funzione si dice *iterativa* o "ricorsiva" quando nella sua espressione c'è un'invocazione a se

dinamico deterministico è quindi fornita dalle soluzioni delle equazioni che lo governano e dipende dalle condizioni iniziali e/o al contorno che si considerano.

La sequenza degli stati che definiscono l'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico a partire da un suo stato iniziale qualunque costituisce un insieme di punti nel suo spazio delle fasi. Questo insieme, ordinato temporalmente, si dice "traiettoria evolutiva" o "orbita" del sistema. L'orbita di un sistema dinamico non ha ovviamente nulla a che vedere con la traiettoria del suo eventuale moto nello spazio reale. Inoltre, la traiettoria evolutiva di un sistema dinamico è una curva in senso proprio nello spazio delle fasi solo quando il sistema considerato è a tempo continuo. Conoscere l'orbita di un sistema dinamico deterministico significa poter prevedere lo stato del sistema in un qualunque istante futuro sulla base della conoscenza del suo stato in qualunque istante precedente e anche ricostruirne il passato a partire da un qualunque istante iniziale.

Si noti che le leggi e i principi che sono alla base della meccanica newtoniana e dell'elettromagnetismo di Maxwell fanno sì che le equazioni dinamiche corrispondenti siano simmetriche rispetto al tempo. È cioè possibile in linea di principio descrivere l'evoluzione di un sistema fisico sia verso il futuro sia verso il passato. In conseguenza della stessa definizione di sistema dinamico deterministico, le traiettorie evolutive di tali sistemi sono univocamente definite per ogni stato iniziale. Una proprietà importante dello spazio delle fasi dei sistemi dinamici deterministici è che le loro traiettorie non possono mai intersecarsi. Infatti, l'esistenza di un punto comune a due traiettorie implicherebbe un'ambiguità nella determinazione degli stati passati e futuri del sistema rispetto allo stato fisico descritto da quel punto.

La teoria dei sistemi dinamici (cfr. appendice 4) è l'insieme dei metodi matematici attraverso i quali si cerca di ottenere, in maniera più o meno esplicita, informazioni sull'evoluzione temporale del sistema partendo da una rappresentazione locale di quest'ultimo (legge del moto o dinamica), assegnata in forma di equazioni differenziali o alle differenze finite. La nascita di questo settore della fisica-matematica può essere fatta risalire a Newton, il quale (in una lettera inviata a Leibnitz nel 1677, la cosiddetta *epistola posterior*) scrisse che aveva trovato un metodo di lavoro importante, che non poteva rivelare in modo palese e che quindi gli comunicava proponendogli un anagramma in una forma quasi impossibile da decifrare:

stessa, cioè quando essa è ottenuta componendosi con se stessa ripetutamente; dominio e codominio di tali funzioni coincidono.

> I fondamenti di queste operazioni sono abbastanza evidenti, in effetti; ma poiché non posso procedere ora con la spiegazione, ho preferito nasconderlo così: *6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux*. Su questa base ho anche cercato di semplificare le teorie che riguardano la quadratura delle curve e sono arrivato a certi teoremi generali.[5]

La frase cifrata, diventata famosa con il nome di "anagramma fondamentale del Calcolo", una volta decifrata afferma: *data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente, fluxiones invenire; et vice versa,* che significa: data un'equazione che contiene un numero qualunque di quantità fluenti (in termini moderni, "derivate"), trovare le flussioni (oggi diremmo "funzioni primitive") e viceversa.

Per determinare analiticamente la traiettoria evolutiva di un sistema dinamico è necessario risolvere esattamente le equazioni che lo descrivono. Anche per i sistemi più semplici questo è possibile soltanto in un numero molto limitato di situazioni e richiede spesso tecniche matematiche sofisticate. Nella prima metà dell'Ottocento sono stati dimostrati i teoremi fondamentali che stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle soluzioni di una equazione differenziale (cfr. appendice 1). Queste condizioni sono relativamente ampie dal punto di vista matematico, ma da sole non consentono di definire nessun procedimento generale per l'individuazione o la costruzione di quelle soluzioni, che di conseguenza vanno cercate caso per caso con metodi specifici determinati dalle proprietà matematiche di ciascuna equazione.

Ciò ha prodotto di fatto un atteggiamento diverso tra i matematici da un lato e i fisici e gli astronomi (e via via nel corso del tempo gli ingegneri, gli economisti, i biologi, ecc.) dall'altro. Per i secondi l'interesse principale era ed è quello di trovare un'espressione approssimata della soluzione, sufficientemente accurata da descrivere in modo accettabile i sistemi considerati e nel contempo abbastanza semplice da poter essere calcolata in un tempo ragionevole. Era stato lo stesso Newton (inventore delle equazioni differenziali e anche di un'intera classe di sistemi dinamici) a utilizzare per primo tecniche di calcolo approssimato e questo settore della matematica trovò nel Settecento e nell'Ottocento uno sviluppo di grande rilievo, in particolare nel campo dell'astronomia planetaria. La disponibilità, a partire dalla fine degli anni Trenta del Novecento, di sistemi di calcolo elettronico di potenza

5. Turnbull H.V (ed.) (1960), *The Correspondence of Isaac Newton*, vol. II: *1676-1687*, Cambridge University Press, Cambridge (traduzione dell'autore).

costantemente crescente e dai costi altrettanto costantemente decrescenti ha reso possibile risolvere le equazioni differenziali (e non solo) in modo numerico, con approssimazioni accurate e in tempi relativamente ridotti, e calcolare quindi con buona precisione le traiettorie evolutive dei sistemi dinamici considerati.

Occorre tuttavia sottolineare che la determinazione numerica dell'orbita di un sistema dinamico nel suo spazio delle fasi è sufficiente a definirne effettivamente l'evoluzione temporale soltanto quando il sistema considerato è estremamente semplice. Quando invece un sistema è complesso (caratterizzato cioè da molte variabili di stato), oppure è "non-lineare" rispetto a qualcuna delle sue variabili dinamiche, oppure non sono note tutte le leggi che concorrono a descriverlo, oppure ancora alcune sue variabili non possono essere misurate con la precisione necessaria, i metodi approssimati comportano inevitabilmente che la validità e la pertinenza delle soluzioni trovate possa (e debba) essere messa in discussione.

Il problema principale in tutti questi casi è costituito dalla "stabilità" delle traiettorie evolutive calcolate, ovvero dalla proprietà di una traiettoria di non cambiare in modo qualitativamente significativo per piccole variazioni dello stato iniziale del sistema. In altre parole, dal punto di vista della fisica (più in generale della scienza) classica si riteneva necessario che le soluzioni delle equazioni dinamiche di un sistema fossero non solo univocamente determinate dalle condizioni iniziali e/o al contorno ma dipendessero con continuità da queste ultime. Il problema non è formale ma assolutamente sostanziale, se si tiene conto che in ogni sistema fisico reale i valori delle variabili dinamiche che definiscono il suo stato iniziale (e anche ogni altro stato successivo effettivamente osservato) possono essere determinati soltanto entro intervalli numerici finiti determinati dalle incertezze sperimentali.

D'altro canto, spesso è più importante conoscere le proprietà comuni di diverse traiettorie evolutive (ad esempio, l'essere o meno periodiche nel tempo) che non i loro dettagli individuali. In molte situazioni applicative è necessario classificare le orbite oppure è richiesto che il sistema evolva lungo un solo tipo di orbita (si veda in particolare l'appendice 4). Classificare le traiettorie e le loro proprietà (senza ricavarne esplicitamente l'espressione matematica o calcolarla numericamente) è stato l'obiettivo per cui è nata la cosiddetta "analisi qualitativa" dei sistemi dinamici (lo studio cioè delle loro proprietà invarianti per trasformazioni di coordinate), introdotta nell'ultimo ventennio dell'Ottocento dal matematico