Il significato concettuale della logica booleana

di Evandro Agazzi

1. Premessa

Intendiamo in questo saggio analizzare alcune delle ragioni per le quali è corretto attribuire a Boole una posizione speciale, quasi di "iniziatore", della moderna logica matematica, nonostante il fatto che, sotto il profilo cronologico, siano esistiti dei predecessori (come Leibniz) o dei contemporanei (come De Morgan) che hanno fatto parecchie cose assai simili a quelle per le quali Boole va giustamente famoso. Nelle considerazioni che seguiranno ci proponiamo di porre in evidenza alcune di queste ragioni, che ci paiono particolarmente significative in quanto rappresentano dei guadagni di chiarezza *concettuale* che, in quanto tali, superano l'aspetto spesso puramente contingente con cui certe "novità" si sono presentate storicamente. Questo tipo di considerazione ci sembra raccomandabile su un piano del tutto generale: è praticamente impossibile, nella maggior parte dei casi, stabilire quando una certa cosa è stata scoperta o affermata "per la prima volta", dal momento che precorrimenti, enunciazioni "praticamente" simili o "letteralmente" identiche si possono molto spesso rinvenire in contesti storici ed epoche diverse. Meno disperata, invece, è l'impresa di appurare quando una certa cosa è stata affermata *esplicitamente* e *consapevolmente*, ed è questo, ci pare, quanto costituisce per davvero l'ingresso di tale "novità" nella storia.

2. Due sensi della nozione di "logica matematica"

Boole può venire considerato, almeno in un certo senso, come l'iniziatore della moderna "logica matematica" in forza di quel suo volumetto del 1847 (l'*Analisi matematica della logica*) di cui si sono recentemente celebrati i 150 anni[1]. Per comprendere il senso di una tale attribuzione è per altro necessario rendersi conto che la nozione di logica matematica ha assunto, di fatto, due significati distinti (ancorché talora inopportunamente confusi) e che a Boole si deve far risalire soltanto uno di essi.

Un primo significato è quello per cui logica matematica equivale a: "logica costruita matematicamente"; il secondo è quello in base a cui si considera la logica matematica come la "logica della matematica". È fuor di dubbio che, da moltissimo tempo, questi due significati si sono mescolati. La logica matematica si può concepire come una logica costruita matematicamente perché, allo stesso modo della quasi totalità delle discipline matematiche, si presenta in forma simbolica, si articola secondo un ampio spettro di "calcoli", fa uso di una notevole quantità di tecniche matematiche (numeriche, algebriche, insiemistiche) per lo sviluppo delle sue ricerche, specialmente a livello metateorico. In essa si dimostrano "teoremi", e gli stessi calcoli logici sono spesso presentati in quella forma assiomatica che è l'abito per così dire standard delle discipline matematiche. Tutto ciò si riflette anche esteriormente nel fatto che numerosi capitoli della logica matematica vengono catalogati in apposite rubriche della *Mathematical Review* o di pubblicazioni affini. D'altro canto è non meno vero che, se si guarda in quali settori la logica matematica viene concretamente usata, e con particolare profitto, ci si rende conto che essa è servita e serve tuttora per saggiare la correttezza di argomentazioni complesse in teorie matematiche, per ricercare dimostrazioni di non contraditorietà, indipendenza, completezza di sistemi assiomatici di natura matematica, per saggiare la compatibilità di certe ipotesi matematiche con determinati sistemi di proposizioni, ed eventualmente la loro equivalenza. In questa veste, la moderna logica si rivela proprio come sviluppata in funzione di alcune discipline matematiche particolarmente astratte, e quindi le inerisce abbastanza naturalmente la qualifica di "logica della matematica".

Ebbene, Boole può essere indicato come l'esplicito fondatore della logica matematica nel primo senso, ossia come colui che ha consapevolmente e intenzionalmente presentato una logica "costruita matematicamente".

1. Cf. Boole [1847].

3. Un confronto con Leibniz

Quanto asserito non contraddice il fatto storico, adeguatamente documentato, che a Leibniz spetta il merito di aver per primo difeso l'idea di una logica formale come *calcolo*, e di aver anche elaborato una concezione molto flessibile di calcolo. In sostanza, proprio Leibniz fece consistere l'essenza del calcolo in un sistema di regole esplicite per operare su simboli, ed affermò quindi che tale essenza non consiste nel fatto che detti simboli debbano rappresentare quantità o grandezze. Ne seguiva con estrema lucidità il programma di un *calculus ratiocinator*, ossia di un calcolo che serva per rappresentare i ragionamenti e che possiamo correttamente tradurre con l'espressione "calcolo logico", cosa del resto confermata alla lettera dal famoso "*calculemus*", ossia dal simbolico invito con cui Leibniz riteneva che si potrebbero risolvere computisticamente le dispute filosofiche quando, una volta accordatisi sulle premesse, i disputanti debbano limitarsi a dedurre le loro conseguenze logiche. È non meno vero e noto che il medesimo Leibniz, avendo (almeno in gran parte) ridotto l'essenza della matematica al calcolo, aveva parlato di una *mathesis universalis*, di cui il calcolo logico rappresentava, per così dire, l'ossatura deduttiva, e in tale spirito aveva già potuto parlare di una logica "matematica" (giungendo addirittura, con un eccesso di generosità, ad attribuire ad Aristotele il merito di essere stato il primo a "ragionare matematicamente fuori dalla matematica")[2].

Rispetto a queste fondamentali intuizioni leibniziane, l'opera di Boole rappresenta un passo nella direzione della concretezza, e nell'adozione della matematica come effettivo strumento per realizzare i calcoli logici. Non sosteniamo che questo passo rappresenti, in senso assoluto, un progresso (forse si potrebbe sostenere che la prospettiva leibniziana rimane concettualmente più ricca), ma è indubbio che esso segnò l'inizio della logica matematica non più come programma più o meno ampiamente abbozzato, bensì come progetto *realizzato* (sia pure parzialmente). Ancor più incisivamente che Leibniz, Boole sottolineò il carattere *operazionale* del calcolo, e insistette sul fatto che la natura delle operazioni dipende esclusivamente dalle condizioni *formali* con cui esse sono definite. In secondo luogo, egli adottò concretamente, per presentare la logica, un calcolo storicamente esistente, costituito dall'algebra del suo tempo.

2. Cf. Leibniz [1696], [1875-90], vol. VII, p. 519.

Queste non sono semplicemente delle circostanze fattuali, ma corrispondono ad una precisa maturazione di ordine concettuale. In Leibniz, il calcolo era in certo senso lo stadio estremo di un processo di astrazione che metteva a nudo i nessi formali e combinatori esistenti fra i concetti ed i giudizi: per quanto il suo funzionamento autonomo e puramente "algoritmico" fosse pienamente garantito dopo la sua costituzione, questa medesima costituzione non era né convenzionale né aprioristica (era semplicemente il rispecchiamento della natura "analitica" dell'intero sapere). Proprio qui sta una delle ragioni per le quali Leibniz non fornì mai, in concreto, quel *calculus ratiocinator* che aveva preconizzato. Probabilmente egli riteneva di dover costruire *il* calcolo logico, e non semplicemente *un* calcolo logico. In Boole, viceversa, il calcolo è in larga misura artificiale e preesistente alle sue possibili interpretazioni; esso è un vero calcolo "astratto", non già nel senso che è ottenuto "per astrazione", bensì nel senso che "fa astrazione" (ossia prescinde) da particolari contenuti o interpretazioni.

4. Le condizioni storiche

Un tale passaggio fu storicamente possibile come conseguenza di una serie di mutamenti avvenuti in seno alla matematica e, in particolare, all'emergere in essa dell'autonomia del simbolismo e delle sue regole, rispetto ai contenuti intuitivi (ivi compresi quelli legati alla cosiddetta "intuizione matematica"). Non è il caso che ci attardiamo a trattare di questi sviluppi, descritti in qualunque buona storia della matematica. Ci basti osservare che uno dei loro frutti più significativi fu il sorgere di quell'"algebra simbolica" (come essa viene chiamata nella seconda parte del *Trattato di algebra* di George Peacock)[3] che, a differenza dell'algebra numerica tradizionale, viene impostata consapevolmente come sistema di regole formali per operare su simboli non interpretati e variamente interpretabili: vero preludio, in ciò, di quella che alcuni decenni dopo verrà chiamata "algebra astratta". In tal modo, a seconda delle varie interpretazioni date ai simboli, si poteva parlare di altrettante "algebre di..." (e di fatto vennero costruite proprio a partire da quegli anni l'algebra dei quaternioni, quella delle matrici, quella dei vettori, ossia tutte algebre contenenti operazioni con proprietà formali parzialmente diverse da quelle delle omonime operazioni numeriche). Fra queste algebre non doveva quindi tardare ad apparire anche un'"algebra della logica", e questo è appunto il senso dell'opera di Boole, ben riflesso nel fatto significativo che il suo calcolo logico ha ricevuto in seguito la denominazione, ancora usata, di "algebra di Boole".

3. Cf. Peacock [1830].

Tenendo conto di questa impostazione algebrica, per cui, idealmente, prima si costruisce formalmente il calcolo operazionale e poi gli si trovano una o più interpretazioni nel campo della logica, si può misurare la novità di Boole rispetto, ad esempio, a De Morgàn, la cui opera più significativa uscì essa pure proprio nel 1847[4]. In De Morgan si può vedere il proseguimento intelligente e fecondo di una linea già diffusa nella pratica dei manuali di logica da vario tempo, consistente in un impiego non insignificante di simbolizzazioni per tradurre le regole formali. Tali simbolizzazioni, tuttavia, erano "fatte su misura" per sintetizzare e rendere più facilmente ricordabili e applicabili le regole logiche, da cui *dipendevano* totalmente quanto all'origine e al significato.

A questo punto, però, si presenta spontanea la domanda: perché si ritenne tanto importante dare una veste matematica alla logica, e addirittura farne una sorta di branca della matematica?

5. La logica come ramo della matematica?

La risposta alla domanda testé formulata è piuttosto complessa e, in primo luogo, richiede che ci si sbarazzi di un luogo comune molto diffuso nella storiografia della logica: quello secondo cui con Boole si inaugura la tendenza a considerare la logica come *un ramo della matematica*. In realtà il titolo dell'opuscolo del 1847 parla di una "analisi matematica della logica" il che, se da un canto lascia già sottintendere che la metodologia dell'analisi matematica sia applicabile con frutto alla logica (vedremo poi perché), d'altro canto lascia pure sussistere l'idea che la logica abbia uno statuto indipendente dalla matematica stessa, condizione questa perché essa (ossia qualcuno dei suoi calcoli) si possa *interpretare* su contenuti logici. Anzi, come è noto, l'algebra "della logica" booleana si può intepretare su due distinte teorie logiche, quella delle classi e quella delle proposizioni, come si preoccupò di mostrare il medesimo Boole.

4. Cf. De Morgan [1847].

Se così stanno le cose, sembra chiaro che non si può attribuire a Boole il proposito di presentare la logica come "ramo della matematica", dal più al meno come non sarebbe corretto affermare che la meccanica razionale o la fisica matematica sono rami della matematica. Evidentemente, esse sono piuttosto dei rami della fisica, trattati in modo matematicamente molto spinto, in quanto rappresentano una forte idealizzazione rispetto all'esperienza fisica ordinaria (non già nel senso banale delle osservazioni empiriche di senso comune, ma nel senso più rigoroso della fisica detta "sperimentale")[5]. In modo analogo, la logica formale, che si colloca già ad un livello di forte idealizzazione rispetto all'argomentare di senso comune, risulta agevolmente "matematizzabile", senza con questo convertirsi in un ramo della matematica.

Dentro quest'ottica, in particolare, risulta agevole intendere il progresso dall'*Analisi* alle *Leggi del pensiero*[6] nelle quali (a parte la questione dello "psicologismo" di cui non intendiamo occuparci) è chiaro e dichiarato l'intento di relazionare il calcolo di tipo algebrico (e quindi artificiale) con la concretezza dell'argomentare logico corretto.

6. Perché matematizzare la logica?

Se il programma non era quello di fare della logica un ramo della matematica, rimane aperta la domanda circa il senso e il fine di una "matematizzazione" della logica, sia pure concepita come una sua *formulazione* secondo i canoni del linguaggio matematico. La risposta è per un verso ovvia, e per un verso un po' sconcertante. Essa è ovvia perché, a partire dagli inizi dell'età moderna, matematizzare un ambito di conoscenza è stato considerato come il mezzo migliore per assicurarvi rigore, oggettività, fecondità e, in ultima analisi, per promuoverlo al rango di *scienza* (con tutti i connotati positivi che una simile qualifica veniva a comportare). Questo fenomeno culturale ha le sue ben note origini in famose pagine di Galileo e Descartes, e ha trovato autorevoli conferme da Newton a Kant (anche in questo caso, pertanto, ci esimiamo dal documentare cose notissime).

5. Per uno sviluppo di queste argomentazioni, e in particolare per un'analisi più dettagliata di questa significativa analogia con il rapporto fisica matematica-fisica sperimentale, ci permettiamo di rinviare al saggio di Agazzi [1986].

6. Cf. Boole [1854].

Del resto, lo stesso Leibniz – per quanto riguarda la logica – non era di avviso molto diverso e, per quanto fosse un convinto assertore della metafisica, non avrebbe probabilmente trovato difficoltà a sottoscrivere le affermazioni finali dell'opuscolo di Boole, là dove questi asserisce che la logica ha rapporti più significativi con la matematica di quanti ne abbia con la metafisica[7]. Quando, poi, la matematizzazione della logica venne effettivamente realizzata (ossia a partire da Boole e, via via, lungo tutto l'arco dell'Ottocento e i primi anni del Novecento) furono in molti coloro che salutarono questo evento come la testimonianza che, *finalmente*, anche la logica (per parafrasare una famosa espressione di Kant) "si era messa sulla via sicura di una scienza". Non ha molta importanza che di questo parere fossero soprattutto i neopositivisti e che, in conseguenza di ciò, siano stati assunti atteggiamenti ingiustificati di sommaria liquidazione (e di incomprensione storica) nei confronti di gloriose epoche passate della storia della logica. Ciò che resta significativo è il fatto che la logica stessa sia stata vista come una disciplina che ha bisogno della matematica per realizzare appieno i *suoi* stessi scopi.

Qui si incontra, per l'appunto, l'aspetto sconcertante di cui si è detto. Infatti proprio la logica è stata considerata, in tutta la tradizione occidentale, come la disciplina che si occupa del *rigore* e della *correttezza* delle argomentazioni in *qualunque* ambito, cosa che, per un verso, consente di considerarla come una scienza o una *teoria* (la teoria, appunto, dell'argomentare corretto) e, per altro verso, come *strumento* (ossia come *organon* utilizzabile per conseguire rigore argomentativo in qualunque indagine conoscitiva)[8]. In particolare, le ragioni per le quali, fra le scienze, la matematica ha sempre goduto di una considerazione molto elevata erano costituite essenzialmente dal fatto che in essa si vedeva un sapere garantito dall'evidenza dei punti di partenza (assiomi e postulati) e dal rigore *logico* delle argomentazioni. Come si può dunque coerentemente asserire che la logica dovrebbe ricevere dalla matematica le proprie garanzie di rigore, se è la matematica stessa che deve la propria reputazione di scienza rigorosa al fatto di applicare la logica con un'osservanza superiore a quella di ogni altra disciplina?

7. «Se ci atteniamo al principio di una vera classificazione, non dobbiamo più associare logica e metafisica, ma logica e matematica... La disciplina mentale che ci è fornita dallo studio della logica come una *scienza esatta* è, dal punto di vista specifico, la medesima che ci è fornita dallo studio dell'analisi» (Boole [1847], [1993], pp. 15-16).

8. Ci permettiamo rinviare, per sviluppi su questo punto, al lavoro di Agazzi [1984].